TD ***LIMITE D'UNE FONCTION***

EXERCICES D'PPLICATIONS ET DE REFLEXIONS AVEC SOLUTIONS

PROF: ATMANI NAJIB 1BAC BIOF

http:// xriadiat.e-monsite.com

LIMITE D'UNE FONCTION

Exercice1 : déterminer : $\lim_{x\to0} x^2+x+2+\frac{1}{x^2}$

Solution : on a : $\lim_{x\to0} x^2+x+2=2$ et $\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}=+\infty$

Donc : $\lim_{x\to0} x^2+x+2+\frac{1}{x^2}=+\infty$

Exercice2 : Soit la fonction $f:x\mapsto\frac{|x-1|x}{x^2-1}$

Déterminer $\lim_{\substack{x\to1\\x\succ1}} f(x)$ et $\lim_{\substack{x\to1\\x\prec1}} f(x)$

Solution : $\forall x\in\mathbb{R}-\{-1;1\}$

Si : $x\succ1$: $f(x)=\frac{(x-1)x}{(x-1)(x+1)}=\frac{x}{x+1}$

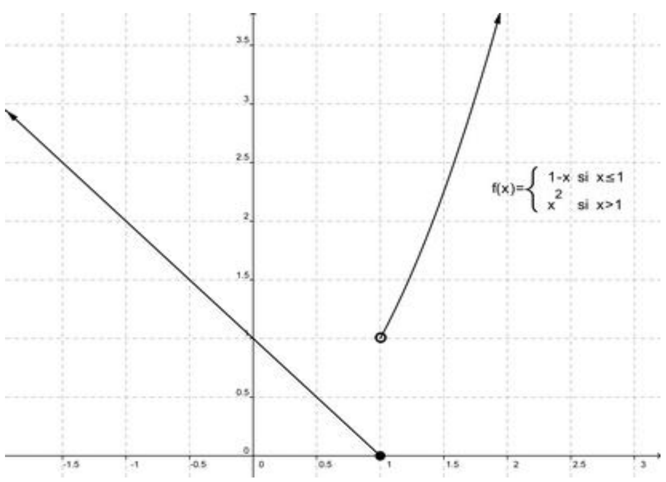
Donc : $\lim_{\substack{x\to1\\x\succ1}} f(x)=\lim_{\substack{x\to1\\x\succ1}}\frac{x}{x+1}=\frac{1}{2}$

Si : $x\prec1$: $f(x)=\frac{-(x-1)x}{(x-1)(x+1)}=-\frac{x}{x+1}$

Donc : $\lim_{\substack{x\to1\\x\prec1}} f(x)=\lim_{\substack{x\to1\\x\prec1}}-\frac{x}{x+1}=-\frac{1}{2}$

Remarque : $\lim_{\substack{x\to1\\x\succ1}} f(x)\neq\lim_{\substack{x\to1\\x\prec1}} f(x)$

Exercice3 :



La courbe ci-contre est la courbe de la fonction définie par Morceaux comme suite :

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$x\mapsto 1-x \; si \; x\leq 1$

$x\mapsto x^2 \; si \; x\succ 2$

Déterminer graphiquement les limites de la fonction f à droite et à gauche de 1.

Exercice4 : Soit la fonction g définie par :

$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$x\mapsto 2x^2-x+3 \; si \; x\geq1$

$x\mapsto -x^2+x+\alpha \; si \; x<1$

Déterminer α pour que la fonction g admet une limite en 1.

Exercice5 : Soit la fonction $f:x\mapsto\frac{(x+1)^2}{|x^2-1|}$

Etudier la limite de f en $x_0=-1$

Solution :Déterminons $\lim_{\substack{x\to-1\\x\succ-1}} f(x)$ et $\lim_{\substack{x\to-1\\x\prec-1}} f(x)$?

Solution : $\forall x\in\mathbb{R}-\{-1;1\}$

Si : $-1\prec x\prec1$: $f(x)=\frac{(x+1)^2}{|x+1||x-1|}=-\frac{x+1}{x-1}$

Donc : $\lim_{\substack{x\to-1\\x\succ-1}} f(x)=\lim_{\substack{x\to-1\\x\succ-1}}-\frac{x+1}{x-1}=0$

Si : $x\prec-1$: $f(x)=\frac{(x+1)^2}{|x+1||x-1|}=\frac{x+1}{x-1}$

Donc : $\lim_{\substack{x\to-1\\x\prec-1}} f(x)=\lim_{\substack{x\to-1\\x\prec-1}}\frac{x+1}{x-1}=0$

donc : $\lim_{\substack{x\to-1\\x\succ-1}} f(x)=\lim_{\substack{x\to-1\\x\prec-1}} f(x)=0$ donc : $\lim_{x\to-1} f(x)=0$

Exercice6 : déterminer : $\lim_{x\to+\infty} x^2-\sqrt{x}$

Solution :on a $\lim_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ **;** $\lim_{x\to+\infty}-\sqrt{x}=-\infty$

Donc Formes indéterminée : "$+\infty-\infty$"

$$\lim_{x\to+\infty} x^2-\sqrt{x}=\lim_{x\to+\infty} x^2\left(1-\frac{\sqrt{x}}{x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty} x^2\left(1-\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)$$

puisque : $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x}}=0$ et $\lim_{x\to+\infty} x^2=+\infty$

alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-\sqrt{x}=+\infty$

Exercice7 : déterminer :1) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3+1}{(x-1)^2}$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3+1}{(x-1)^2}$

3) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} 2x^3+x^2-x+4$

Solution : 1)on a : $\lim\limits_{x\to1}(x-1)^2=0^+$ et $\lim\limits_{x\to1}x^3+1=2$

Donc : $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3+1}{(x-1)^2}=+\infty$

2)on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3+1}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}x\frac{1+\frac{1}{x^3}}{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}$

et on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^3}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}1+\frac{1}{x^3}=1$

et $\lim\limits_{x\to+\infty}1-\frac{1}{x}=1$ Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3+1}{(x-1)^2}=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}2x^3+x^2-x+4=\lim\limits_{x\to+\infty}2x^3\left(1+\frac{1}{2x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{2}{x^3}\right)$

on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2x}=0$ et

$\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}2x^3+x^2-x+4=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}2x^3+x^2-x+4=\lim\limits_{x\to-\infty}2x^3\left(1+\frac{1}{2x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{2}{x^3}\right)$

on a : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{x^3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{2x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{2x}=0$ et

$\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}2x^3+x^2-x+4=-\infty$

Exercice8 :calculer $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{3x+1}{x^2+x-2}$

Solution :on a : $\lim\limits_{x\to1^+}3x+1=4$ on a : $\lim\limits_{x\to1^+}x^2+x-2=0^+$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
x^2+x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{3x+1}{x^2+x-2}=+\infty$

Exercice9 : Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}2x+5x^2-7x^4$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+5x^2-7x^4}{x-10x^2+14x^3}$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x+8x^2-2x^5}{x^2+2x^6}$ 4) $\lim\limits_{x\to1}\frac{3x^2-x}{2x^3+2x-4}$

5) $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt{4x+1}-3}{x^2-3x+2}$

Solution : 1) $\lim\limits_{x\to+\infty}2x+5x^2-7x^4=\lim\limits_{x\to+\infty}-7x^4=-\infty$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+5x^2-7x^4}{x-10x^2+14x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-7x^4}{14x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x}{2}=-\infty$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x+8x^2-2x^5}{x^2+2x^6}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-2x^5}{2x^6}=\lim\limits_{x\to-\infty}-\frac{1}{x}=0$

Exercice10 : Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}$ 2) $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\cos\sqrt{x}-1}{x}$ 3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sqrt{3}\sin x-\cos x}{x-\frac{\pi}{6}}$

Solution : 1)

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 2x}{2x}\times\frac{3x}{\sin 3x}\times\frac{2}{3}=1\times1\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$

2) $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\cos\sqrt{x}-1}{x}$ directement on trouve une formes indéterminée : "$\frac{0}{0}$"

$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\cos\sqrt{x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}-\frac{1}{2}\left(\frac{1-\cos\sqrt{x}}{\frac{\left(\sqrt{x}\right)^2}{2}}\right)=\lim\limits_{h\to0^+}-\frac{1}{2}\left(\frac{1-\cos h}{\frac{h^2}{2}}\right)=-\frac{1}{2}\times1=-\frac{1}{2}$

(On pose $\sqrt{x}=h$)

3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sqrt{3}\sin x-\cos x}{x-\frac{\pi}{6}}$

On montre que : $\sqrt{3}\sin x-\cos x=2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sqrt{3}\sin x-\cos x}{x-\frac{\pi}{6}}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{x-\frac{\pi}{6}}$

On pose $x-\frac{\pi}{6}=h$) donc $x\to\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow h\to0$

Donc : $=2\lim\limits_{h\to0}\frac{\sin h}{h}=2\times1=2$

Exercice11 : Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to0}x^2\sin\frac{1}{x}$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{x^3}$ 3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+\sin x}{x^2(2+\cos x)}$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty} 1+\frac{x}{2+\sqrt{x^4+1}}$

Solution : 1)on pose : $f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$

$\forall x\in\mathbb{R}^*$ $\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|\le 1$ donc : $|f(x)|\le x^2$ et on a

$\lim\limits_{x\to 0} x^2=0$ Alors : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{x^3}$? on pose : $f(x)=\frac{\cos x}{x^3}$

$\forall x\in\mathbb{R}^*$ $|\cos x|\le 1$ donc : $|f(x)|\le\frac{1}{|x|^3}$ et on a

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{|x|^3}=0$ Alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+\sin x}{x^2(2+\cos x)}$? on pose : $f(x)=\frac{1+\sin x}{x^2(2+\cos x)}$

$\forall x\in\mathbb{R}^*$ $-1\le\cos x\le 1$ et $-1\le\sin x\le 1$ donc :

$0\le\frac{1+\sin x}{2+\cos x}\le 2$ donc $0\le f(x)\le\frac{2}{x^2}$

Et puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty} 0=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x^2}=0$ Alors :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty} 1+\frac{x}{2+\sqrt{x^4+1}}$? on pose : $f(x)=1+\frac{x}{2+\sqrt{x^4+1}}$

$\forall x\in\mathbb{R}^*$ $2+\sqrt{x^4+1}\ge\sqrt{x^4}$ cad $2+\sqrt{x^4+1}\ge x^2$

donc : $\frac{1}{2+\sqrt{x^4+1}}\le\frac{1}{x^2}$ donc : $|f(x)-1|\le\frac{1}{|x|}$

Et puisque : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{|x|}=0$ Alors : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$

Exercice12 : Soient les fonctions tels que :

$f(x)=\sqrt{2x+1}\left(-3x^2+x\right)$ et $g(x)=\frac{-2x^2+1}{(x-3)^2}\left(\sqrt{x}+1\right)$

$k(x)=\frac{-3x+1}{x(x-2)}$ et $h(x)=\frac{x^2+1}{x^3}\sin x$

1)Déterminer : $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2)Déterminer : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to 3} g(x)$

3)Déterminer : $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$

4)Déterminer les limites aux bornes du domaine de définition de k

Solution :

1)Déterminer : $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ et $f(x)=\sqrt{2x+1}\left(-3x^2+x\right)$

$\lim\limits_{x\to 2} 2x+1=5$ et $\lim\limits_{x\to 2} -3x^2+x=-10$

Donc : $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\sqrt{5}\times(-10)=-10\sqrt{5}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} 2x+1=\lim\limits_{x\to+\infty} 2x=+\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2x+1}=+\infty$

Et on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} -3x^2+x=\lim\limits_{x\to+\infty} -3x^2=-\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

- 2) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$? et $g(x)=\frac{-2x^2+1}{(x-3)^2}\left(\sqrt{x}+1\right)$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}+1=+\infty$

Et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2x^2+1}{(x-3)^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2x^2}{x^2}=-2$ donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$

- 2) $\lim\limits_{x\to 3} g(x)$? et $g(x)=\frac{-2x^2+1}{(x-3)^2}\left(\sqrt{x}+1\right)$

$\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{x}+1=\sqrt{3}+1$ et $\lim\limits_{x\to 3} -2x^2+1=-17$ et $\lim\limits_{x\to 3}(x-3)^2=0^+$

donc : $\lim\limits_{x\to 3} g(x)=-\infty$

3) $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$?.

$\lim\limits_{x\to 0} h(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+1}{x^2}\frac{\sin x}{x}$

Or $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ et puisque : $\lim\limits_{x\to 0} x^2+1=1$ et $\lim\limits_{x\to 0} x^2=0^+$

et $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+1}{x^2}=+\infty$ alors : $\lim\limits_{x\to 0} h(x)=+\infty$

4) $k(x)=\frac{-3x+1}{x(x-2)}$ donc : $D_k=]-\infty;0[\cup]0;2[\cup]2;+\infty[$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} k(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-3x+1}{x^2-2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-3x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-3}{x}=0$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} k(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-3x+1}{x^2-2x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-3x}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-3}{x}=0$
- $\lim\limits_{x\to 0} -3x+1=1$ et $\lim\limits_{x\to 0} x^2-2x=0$

Etude du signe de : x^2-2x

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$x(x-2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $\lim_{x\to0^+} x^2-2x=0^-$ et $\lim_{x\to0^-} x^2-2x=0^+$

Donc : $\lim_{x\to0^+} k(x)=-\infty$ et $\lim_{x\to0^-} k(x)=+\infty$

$\lim_{x\to2} -3x+1=-5$ et $\lim_{x\to2^+} x^2-2x=0^+$ et $\lim_{x\to2^-} x^2-2x=0^-$

Donc : $\lim_{x\to2^+} k(x)=-\infty$ et $\lim_{x\to2^-} k(x)=+\infty$

Exercice13 : calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{2x}-2}{x^2+3x-10}$ 2) $\lim_{x\to1}\frac{2x^3+3x^2-4x-1}{x^3-1}$

3) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}-x$ 4) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{x-\frac{\pi}{4}}$

Solution : 1) $\lim_{x\to2}\sqrt{2x}-2=0$ et $\lim_{x\to2}x^2+3x-10=0$

on trouve une formes indéterminée : "$\frac{0}{0}$"

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{2x}-2}{x^2+3x-10}=\lim_{x\to2}\frac{\left(\sqrt{2x}-2\right)\left(\sqrt{2x}+2\right)}{\left(x^2+3x-10\right)\left(\sqrt{2x}+2\right)}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{(2x-4)}{\left(\sqrt{2x}+2\right)}\times\frac{1}{(x-2)(x+5)}=\lim_{x\to2}\frac{2}{\left(\sqrt{2x}+2\right)}\times\frac{1}{(x+5)}=\frac{2}{14}$$

2) $\lim_{x\to1}\frac{2x^3+3x^2-4x-1}{x^3-1}$?

On a : $x^3-1=(x-1)\left(x^2+x+1\right)$

Et $2x^3+3x^2-4x-1=(x-1)\left(2x^2+5x+1\right)$

Donc :

$$\lim_{x\to1}\frac{2x^3+3x^2-4x-1}{x^3-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)\left(2x^2+5x+1\right)}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}=\lim_{x\to1}\frac{2x^2+5x+1}{x^2+x+1}=\frac{8}{3}$$

3) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}-x$?

On a : $\lim_{x\to+\infty}x^2+x=+\infty$ donc : $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}=+\infty$

Et $\lim_{x\to+\infty}-x=-\infty$

on trouve une formes indéterminée : "$+\infty-\infty$"

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{|x|\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)}+x}$$ or $x\to+\infty$ donc $|x|=x$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\left(\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)}+1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)}+1}=\frac{1}{2}$$

4) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{x-\frac{\pi}{4}}$

On pose $x-\frac{\pi}{4}=h$ donc $x\to\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow h\to0$(

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{x-\frac{\pi}{4}}=\lim_{h\to0}\frac{\tan\left(h+\frac{\pi}{4}\right)}{h}$$

or : $\tan\left(h+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan h+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan h\times\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{\tan h+1}{1-\tan h}$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{x-\frac{\pi}{4}}=\lim_{h\to0}\frac{2}{1-\tan h}\times\frac{\tan h}{h}=\frac{2}{1}\times1=2$$

Exercice14 : monter que : $\lim_{x\to0}x^2\cos\left(\frac{2}{x}\right)=0$

Solution : 1) on a $\forall x\in\mathbb{R}^*$ $\left|\cos\left(\frac{2}{x}\right)\right|\le1$

donc $\left|x^2\cos\left(\frac{2}{x}\right)\right|\le x^2$ et on a $\lim_{x\to0}x^2=0$

Donc : $\lim_{x\to0}x^2\cos\left(\frac{2}{x}\right)=0$

Exercice15 : monter que: $\lim_{x\to0}2+x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)=2$

Solution : $x\in\mathbb{R}^*$ $\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|\le1$ donc :

$|f(x)-2|=x^2\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|\le x^2$ et on a $\lim_{x\to0}x^2=0$

Alors : $\lim_{x\to0}f(x)=2$

Exercice16 : a)monter que: $|f(x)-3|\le\frac{2}{3}|x-4|$

b)monter que: $\lim_{x\to4}\sqrt{2x+1}=3$

Solution : $\forall x \in \left[-\frac{1}{2};+\infty\right[$

$|f(x)-3| = \left|\sqrt{2x+1}-3\right| = \frac{2|x-4|}{\sqrt{2x+1}+3}$

et on a $\sqrt{2x+1}+3 \geq 3$ donc : $|f(x)-3| \leq \frac{2}{3}|x-4|$

et puisque : $\lim_{x\to 4}|x-4| = 0$ Alors : $\lim_{x\to 4} f(x) = 3$

Exercice17 : Soit la fonction : $f : x \mapsto \frac{1+\sin x}{1+\sqrt{x}}$

déterminer : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

Solution : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ on a $1+\sqrt{x} \geq \sqrt{x}$ et

$0 \leq 1+\sin x \leq 2$ donc $\left|\frac{1+\sin x}{1+\sqrt{x}}\right| \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$ donc

$|f(x)| \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$ et on a $\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$ donc :

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

Exercice18: Soit la fonction : $f : x \mapsto \left(x^2+x^4\right)\sin\frac{1}{x}$

déterminer : $\lim_{x\to 0} f(x)$

Solution : $\forall x \in \mathbb{R}^*$ on a $-1 \leq \sin\frac{1}{x} \leq 1$ et $x^2+x^4 \geq 0$

donc $-x^2-x^4 \leq \left(x^2+x^4\right)\sin\frac{1}{x} \leq x^2+x^4$ et puisque :

$\lim_{x\to 0} x^2+x^4 = \lim_{x\to 0} -x^2-x^4 = 0$ alors : $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

Exercice19 : Soit la fonction : $f(x) = 3x^2+5x+1$

Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^+$ on a $3x^2 \leq f(x)$

En déduire : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

Solution : et et puisque : $\lim_{x\to+\infty} 3x^2 = +\infty$ alors :

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Exercice20 : Soit la fonction : $f : x \mapsto x+\sin x-1$

déterminer : $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

Solution : $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $-1 \leq \sin x \leq 1$ donc :

$x-2 \leq f(x) \leq x$ et puisque :

$\lim_{x\to-\infty} x = -\infty$ alors : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

Exercice21 : Soit $f(x) = \frac{2+\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}$

1- Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^*)$ $f(x) \geq \frac{1}{x^2}$

2- En déduire $\lim_{x\to 0} f(x)$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »
Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices
Que l'on devient un mathématicien